RED BUILDING TEAM

قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة السابعة

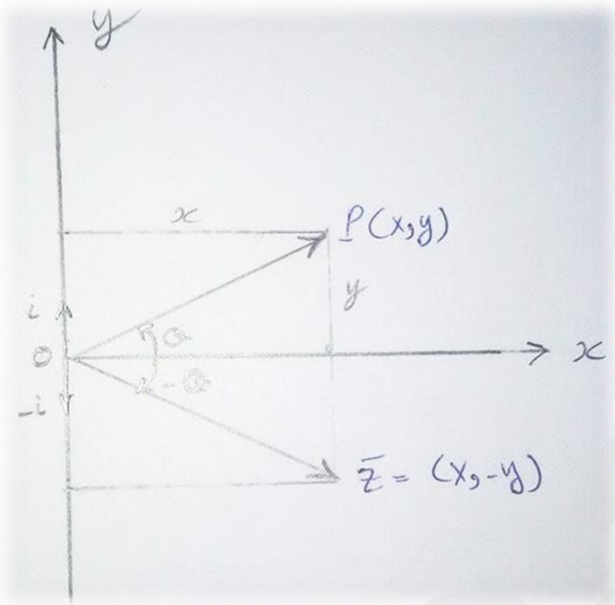
٩ صفحات

الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٢

الأعداد العقدية :

$$z = x + iy \qquad x, y \in R \qquad i = \sqrt{-1}$$



$$\left.\begin{matrix} x = Re(z) \\ y = Im(z) \end{matrix}\right\} \in R$$

طول العدد العقدي =

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\|z\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\|z\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- الزاوية تقدر ب: الراديان حصراً

العدد العقدي الصفري 0 ليس لديه زاويه

مرافق العدد العقدي complex conjnate :

$$\bar{z} = x - i\,y$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\bar{z})$$

$$Im(z) = -Im\,(\bar{z})$$

$$\Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

العمليات على الأعداد العقدية:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \, , z_2 = x_2 + i\, y_2$$

$$z_1 = z_2 \; if \; x_1 = x_2 \quad and \quad y_1 = y_2$$

$$z_1 \mp z_2 = (x_1 + i\, y_1) \mp (x_2 + i\, y_2) = (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 . z_2 &= (x_1 + i\, y_1).(x_2 + i\, y_2) \\ &= (x_1 . x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2\, y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 . \overline{z_1} &= (x + iy).(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 \\ &= \|z\|^2 \end{aligned}$$

القسمة: نضرب البسط و المقام بمرافق المقام

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{\|z_2\|^2} : z_2 \neq 0$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|\bar{z}\|^2} \frac{\bar{z}}{z . \bar{z}}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i . \bar{\imath}} = -i$$

$$\|i\| = 1, arc\;(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$i = 0 + i(1)$$

التعبير عن x و y بدلاله z:

$$z = x + iy \, , \bar{z} = x - iy$$

$$z+\bar{z}=2x \Longrightarrow x=Re(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \Longrightarrow x=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$z-\bar{z}=2iy \Longrightarrow y=Im(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \Longrightarrow y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

قوى العنصر التخيلي :

$$i=\sqrt{-1}, i^2=-1 \Longrightarrow i^3=i.i^2=-i$$

$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$$

$$i^5=i.i^4=i$$

$$i^n=\begin{cases} 1: n=4k \\ i: n=4k+1 \\ -1: n=4k+2 \\ -i: n=4k+3 \end{cases} \qquad n,k\in\mathbb{N}$$

الشكل المثلثي و الأسي للعدد العقدي :

$$x=\rho\cos\varphi \qquad ,y=\rho\sin\varphi$$

$$\begin{aligned} z&=x+iy \\ &=\rho\cos+i\,\rho\sin\varphi=\rho(cos\varphi+isin\varphi) \\ &=\rho\;cis(\varphi): c=cos\varphi, s=\sin(\varphi) \\ &=\rho cis(\varphi+2\pi k) : k\in N \end{aligned}$$

علاقة أولر :

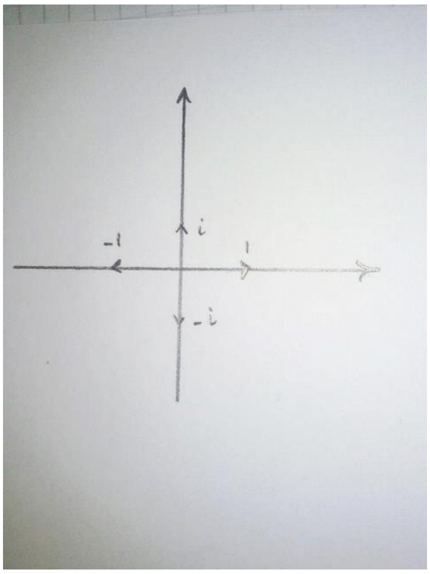
$$\boldsymbol{e^{i\rho}=cos\varphi+i\;sin\varphi}$$

الشكل الأسي : $z=x+iy=\rho\;cis\;(\varphi)=\rho\;e^{i\varphi}=\rho e^{i(\varphi+2\pi k)}$

*: لو أضفنا للزاوية $(2\pi k)$حيث (k عدد صحيح) لا تتغير العلاقة

المرافق للشكل الأسي $\bar{z} = \rho e^{-i(\varphi+2\pi k)}$

الأعداد الرئيسية بالشكل الأسي :



$$1 = 1e^{i(2\pi k)} = e^{i2\pi k} \quad : k \in N$$

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$$

$$-1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$-i = e^{i(3\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$$

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi 2}$$

$$z_1 . z_2 = (\rho_1 \rho_2) e^{i(\rho_1+\rho_2)}$$

$$\|z_1 . z_2\| = \rho_1 . \rho_2 = \|z_1\| . \|z_2\|$$

$$arc(z_1 . z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = arc(z_1) + arc\,(z_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi 1}}{\rho_2\, e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$$

$$arc\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = arc(z_1) - arc(z_2)$$

$$arc\,\left(\frac{1}{z}\right) = -arc\,(z)$$

لوغارتم عدد عقدي أو عدد سالب :

$$z = \rho e^{i(\varphi+2\pi k)}$$

$$\ln z = \ln[\rho e^{i(\varphi+2\pi k)}]$$
$$\Rightarrow \ln\rho + \ln[e^{i(\varphi+2\pi k)}] \Rightarrow \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k)$$

التعيين الرئيسي للعقدي : ((التعيين الرئيسي يقصد به عند k=0))

$$\ln z = \ln\rho + i\varphi$$

اللوغارتم الحقيقي للعدد ١ $\ln 1 = \ln\left(e^{i2\pi k}\right) = i2\pi k$

التعيين الرئيسي للعدد 1 $\ln 1 = 0$

$$\ln(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\ln(-1) = i(\pi + 2\pi k)$$

$$\ln(-i) = i\left(3\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

لوغارتم العدد العقدي السالب :

$$a \in \mathbb{R}^-, a = -|a| \Rightarrow \ln(a) = \ln[|a|e^{i(\pi+2\pi k)}] \Rightarrow$$

$\ln a = ln|a| + i[\pi + 2\pi k] \Rightarrow$ هو و ناتج لا نهائي القيم

ملاحظة: اللوغارتم الطبيعي هو التعيين الرئيسي للوغارتم العقدي

ملاحظة : لايوجد ترتيب بالاعداد العقديه ((و يطلق عليها مجموعه غير مرتبه))و لا يوجد موجب و سالب حيث مفهوم الموجب و السالب تابع لمجموعه الاعداد الحقيقيه

مثال : احسب لوغارتم : $\ln(1 - i)$

الطول $\|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\ln(1-i) = \ln\left(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}) + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

رفع العدد العقدي لقوة حقيقية :

$$z^\alpha = \left[\rho e^{i(\varphi+2\pi k)}\right]^\alpha, \alpha \in R$$

$$= \rho^\alpha e^{i(\alpha\varphi+2\pi k\alpha)}$$

$$\|z^\alpha\|\rho^\alpha = \|z\|^\alpha$$

مثال : احسب الجذور الأربعة للواحد (حل المعادله: $z^4 = 1$)

$$z = 1^{\frac{1}{4}}$$

$$1 = e^{2\pi k} \Rightarrow 1^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}k}$$

$$z_0 = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$z_4 = z_0 = 1$$

$$z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n . e^{in\varphi}$$ عدد طبيعي n

$$\rho^n(cosn\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n(cos\varphi + isin\varphi)^n$$

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n,$$

و هي علاقه ديمو افر

مثال : احسب $\cos 3\varphi, \sin 3\varphi$ بدلاله النسب المثلثية لـφ (علاقه ديموافر)

نعوض كل n ب 3

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (cos\varphi + i\sin\varphi)^3$$
$$= \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi - i\sin^3\varphi$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin 3\varphi$$

رفع العدد العقدي لقوة عقديه :

$$z = \rho e^{i(\varphi+2\pi k)} \qquad a = \alpha + i\beta$$

$$z^a = e^{alnz}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)[\ln(\rho)+i(\varphi+2\pi k)]} = e^{\alpha ln\rho-\beta(\varphi+2\pi k)+i[\beta\ln\rho+\alpha(\varphi+2\pi k)]}$$

$$= e^{\alpha ln\rho-\beta(\varphi+2\pi k)}.e^{i(\beta ln\rho+\alpha\varphi+\alpha 2\pi k)}$$

$$\|z\|^\alpha = e^{\alpha ln\rho-\beta(\varphi+2\pi k)}$$

$$\arg(z^a) = \beta ln\rho + \alpha\varphi + \alpha 2\pi k$$

مثال : احسب طول و زاوية العدد $z = 1^i$:

$$z = 1^i = e^{iln1}$$

$$= e^{i\ln(e^{i2\pi k})} \Longrightarrow e^{i(i2\pi k)} = e^{-(2\pi k)}$$

$$\|1^i\| = e^{-(2\pi k)}$$

$$\arg(1^i) = 0$$

خواص الطويله و المرافق :

$$z = 0 \Leftrightarrow \|z\| = 0$$
$$\|z_1 . z_2\| \Leftrightarrow \|z_1\| . \|z_2\|$$
$$\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$$

$$\|z_1 + z_2\| \le \|z_1\| + \|z_2\|$$
$$\|z\| = \|\bar{z}\|$$
$$z . \bar{z} = \|z\|^2$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$$
$$\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$$

اذا كان $PN(Z)$ حدودية ذات أمثال حقيقيه فإن مرافق الحدودية هو مرافق Z

$$\overline{PN(Z)} = PN(\bar{z})$$
$$x = RE(z) \le \|z\|$$
$$y = IM(z) \le \|z\|$$

مثال : عبر عن معادله المستقيم و الدائرة التاليتين :

$$4x + 3y = 1$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$2(z+\bar{z})+\frac{3}{2i}(z-\bar{z})-1 \Longrightarrow 4iz+4i\bar{z}+3z-3\bar{z}=2i$$

$$\Longrightarrow (4i+3)z+(4i-3)\bar{z}=2i$$

علمتني *الرياضيات* أن العدد السالب كلما كبرت أرقامه كلما صغرت قيمته

كالمتعالين على الناس ؛ كلما ازدادوا تعالياً كلما صغروا في عيون غيرهم